

# Simulation eines idealen Gases und einer Carnot Maschine

## Lösungen Aufgaben 1–2

### 1 Theorie eines idealen Gases

#### 1.1 Expansion ins Vakuum

Es gibt weder Arbeit noch Wärmeaustausch. Innere Energie und Temperatur bleiben gleich. Der Anfangsdruck  $P_1$  folgt aus dem idealen Gasgesetz:

$$P_1 = \frac{nRT_1}{V_1} = \frac{(1 \text{ mol})(8.314 \text{ m}^3\text{Pa/Kmol})(300 \text{ K})}{0.25 \text{ m}^3} = 9977 \text{ Pa}$$

Gemäß dem idealen Gasgesetz  $P_1V_1 = P_2V_2 = RT$  ergibt sich für den Druck  $P_2 = P_1/2 = 4989 \text{ Pa}$ .

#### 1.2 Adiabatische Expansion

a) Adiabatisch:  $dq = 0$ . Darum  $dU = -dW$

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV = C_V dT + 0dV = C_V dT$$

$$-dW = -PdV = -\frac{RT}{V}dV$$

Setzt man die beiden Größen gleich, ergibt sich

$$C_V dT + \frac{RT}{V}dV = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{T}dT + \frac{R}{C_V V}dV = 0$$

Integration liefert

$$\ln T + \frac{R}{C_V} \ln V = \textit{konstant}$$

Anwendung der Exponentialfunktion ergibt

$$TV^{R/C_V} = \textit{konstant}$$

Für ein einatomiges ideales Gas gilt  $C_V = \frac{3}{2}R$  bzw.  $\frac{R}{C_V} = \frac{2}{3}$ , sodass  $TV^{2/3} = \textit{konstant}$

Für 1 Mol eines idealen Gases ist  $T = \frac{PV}{R}$  und folglich  $PV^{5/3} = \textit{konstant}$

$$\text{Analog } V = \frac{RT}{P} \Rightarrow \frac{T^{5/3}}{P^{2/3}} = \textit{konstant} \Rightarrow \frac{T}{P^{2/5}} = \textit{konstant}$$

Für einen adiabatischen Prozess ergibt sich somit für ein einatomiges ideales Gas

$$\begin{array}{l} T_1 \rightarrow T_2 : \quad P_2 = P_1 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{5/2} \quad V_2 = V_1 \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{3/2} \\ P_1 \rightarrow P_2 : \quad T_2 = T_1 \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{2/5} \quad V_2 = V_1 \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{3/5} \\ V_1 \rightarrow V_2 : \quad T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{2/3} \quad P_2 = P_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{5/3} \end{array}$$

Hier wollen wir den Druck  $P_2$  berechnen, wenn das Volumen adiabatisch auf  $V_2 = 2V_1$  verdoppelt wird:

$$P_2 = P_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{5/3} = 9976.8 \text{ Pa} \left(\frac{1}{2}\right)^{5/3} = 3142.5 \text{ Pa}$$

- b) Arbeit während der adiabatischen Expansion

$$W_{\text{ad}} = U_1 - U_2 = \frac{3}{2}nR(T_1 - T_2) = \frac{3}{2}nRT_1 \left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{2/3}\right) = U_1 \left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{2/3}\right)$$

Hier wurde benutzt, dass die innere Energie eines einatomigen idealen Gases  $U = \frac{3}{2}nRT$  ist. Für  $V_2 = 2V_1$  erhalten wir

$$W_{\text{ad}} = U_1 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3}\right) \approx \boxed{0.37 U_1 = 1385 \text{ J}}$$

### 1.3 Isotherme Expansion

- a) Bei konstanter Temperatur sagt das ideale Gasgesetz  $P_1V_1 = P_2V_2$ , d.h.

$$P_2 = \frac{P_1V_1}{V_2} = \frac{9976.8 \text{ Pa}}{2} = \boxed{4988.4 \text{ Pa}}$$

- b) Arbeit bei isothermer Expansion

$$W_{\text{iso}} = \int_{V_1}^{V_2} P dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V} dV = nRT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{2}{3}U \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Dies liefert für  $V_2 = 2V_1$

$$W_{\text{iso}} = \frac{2}{3}U \ln 2 \approx \boxed{0.46 U = 1729 \text{ J}}$$

### 1.4 Wärmekapazität

- a) Für ein einatomiges ideales Gas ist  $C_V = \frac{3}{2}R$  und  $C_P = \frac{5}{2}R$ .
- b) Die molare Wärmekapazität gibt an, welche Wärmemenge  $\Delta Q$  benötigt wird, um die Temperatur von 1 Mol Substanz um  $\Delta T$  zu erhöhen:

$$C_{\text{molar}} = \frac{\Delta Q}{\Delta T}$$

## 2 Theorie der Carnot-Maschine

### 2.1 Aufbau des Carnot-Kreisprozesses

- a) Analog zu Aufgabe 1.3a:

$$P_B = \frac{P_A V_A}{V_B} = \frac{P_A}{2} = \frac{19954.7 \text{ Pa}}{2} = \boxed{9977.35 \text{ Pa}}$$

- b) Der Druck  $P_C$  am Ende der adiabatischen Expansion  $B \rightarrow C$ , während der die Temperatur von  $T_2 = 600 \text{ K}$  auf  $T_1 = 400 \text{ K}$  sinken soll, berechnet sich entsprechend Aufgabe 1.2:

$$P_C = P_B \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{5/2} = 9977.35 \text{ Pa} \left(\frac{400 \text{ K}}{600 \text{ K}}\right)^{5/2} = \boxed{3620.65 \text{ Pa}}$$

- c) Der letzte Schritt des Carnot-Kreisprozesses ist die adiabatische Kompression  $D \rightarrow A$ , die zurück zum Ausgangsdruck  $p_A$  führt:

$$P_D = P_A \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{5/2} = 2P_B \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{5/2} = 2P_C = \boxed{7241.3 \text{ Pa}}$$

## 2.2 Analyse und Optimierung des Carnot-Kreisprozesses

- a) Wirkungsgrad  $\eta_{\text{carnot}}$  einer Carnot Maschine, die zwischen zwei Wärmereservoirs mit den Temperaturen  $T_1 = 400 \text{ K}$  und  $T_2 = 600 \text{ K}$  arbeitet:

$$\eta_{\text{carnot}} = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{400 \text{ K}}{600 \text{ K}} = \boxed{33\%}$$

- b) Wärme, die ins System übertragen wird, und Arbeit, die vom System geleistet wird, für jeden Schritt des Carnot-Kreisprozesses:

Schritt 1: Isotherme Expansion  $A \rightarrow B$ , entsprechend Aufgabe 1.3b:

$$\boxed{W_{AB} = \frac{2}{3}U_A \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = 3458 \text{ J}}$$

$$\boxed{Q_{AB} = W_{AB}} \quad U_B = U_A = \frac{3}{2}nRT_2 \quad (\text{für einatomiges ideales Gas})$$

Schritt 2: Adiabatische Expansion  $B \rightarrow C$ , entsprechend Aufgabe 1.2:

$$W_{BC} = U_B \left(1 - \left(\frac{V_B}{V_C}\right)^{2/3}\right) = U_B \left(1 - \frac{T_C}{T_B}\right) = \boxed{U_A \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) = 2494 \text{ J}}$$

$$\boxed{Q_{BC} = 0} \quad U_C = U_B - W_{BC} = U_A \frac{T_1}{T_2}$$

Schritt 3: Isotherme Kompression  $C \rightarrow D$ , entsprechend Aufgabe 1.3b:

$$W_{CD} = \frac{2}{3}U_C \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right) = \frac{2}{3}U_A \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right) \frac{T_1}{T_2} \stackrel{(*)}{=} -\frac{2}{3}U_A \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) \frac{T_1}{T_2} = \boxed{-W_{AB} \frac{T_1}{T_2} = -2305 \text{ J}}$$

$$\boxed{Q_{CD} = W_{CD}} \quad U_D = U_C = U_A \frac{T_1}{T_2}$$

Gleichung (\*) ergibt sich, weil für die beiden Adiabaten  $B \rightarrow C$  und  $D \rightarrow A$  gemäß Aufgabe 1.2a gilt:

$$V_C = V_B \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{3/2}, \quad V_A = V_D \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{3/2} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_C}{V_B} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{3/2} = \frac{V_D}{V_A} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_D}{V_C} = \frac{V_A}{V_B}$$

Schritt 4: Adiabatische Kompression  $D \rightarrow A$ , entsprechend Aufgabe 1.2:

$$W_{DA} = -W_{AD} = -U_A \left(1 - \left(\frac{V_A}{V_D}\right)^{2/3}\right) = -U_A \left(1 - \frac{T_D}{T_A}\right) = -U_A \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) = \boxed{-W_{BC}}$$

$$\boxed{Q_{DA} = 0}$$

Der Wirkungsgrad  $\eta = W/Q_{AB}$  des Kreisprozesses ergibt sich aus der totalen Arbeit  $W$  und der bei hoher Temperatur zugeführten Wärme  $Q_{AB}$ :

$$W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA} = W_{AB} \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right), \quad Q_{AB} = W_{AB} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} = \eta_{\text{carnot}}}$$