Simulation eines idealen Gases und einer Carnot Maschine

Lösungen Aufgaben 1–2

1 Theorie eines idealen Gases

1.1 Expansion ins Vakuum

Es gibt weder Arbeit noch Wärmeaustausch. Innere Energie und Temperatur bleiben gleich. Der Anfangsdruck P_1 folgt aus dem idealen Gasgesetz:

$$P_1 = \frac{nRT_1}{V_1} = \frac{(1\text{ mol})(8.314\text{ m}^3\text{Pa/Kmol})(300\text{ K})}{0.25\text{ m}^3} = 9977\text{ Pa}$$

Gemäß dem idealen Gasgesetz $P_1V_1 = P_2V_2 = RT$ ergibt sich für den Druck $\boxed{P_2 = P_1/2 = 4989\text{ Pa}}$.

1.2 Adiabatische Expansion

a) Adiabatisch: $\mathrm{d}q = 0$. Darum $\mathrm{d}U = -\mathrm{d}W$

$$\mathrm{d}U = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \mathrm{d}T + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T \mathrm{d}V = C_V\mathrm{d}T + 0\mathrm{d}V = C_V\mathrm{d}T$$

$$-\mathrm{d}W = -P\mathrm{d}V = -\frac{RT}{V}\mathrm{d}V$$

Setzt man die beiden Größen gleich, ergibt sich

$$C_V\mathrm{d}T + \frac{RT}{V}\mathrm{d}V = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{T}\mathrm{d}T + \frac{R}{C_VV}\mathrm{d}V = 0$$

Integration liefert

$$\ln T + \frac{R}{C_V}\ln V = \mathit{konstant}$$

Anwendung der Exponentialfunktion ergibt

$$TV^{R/C_V} = \mathit{konstant}$$

Für ein einatomiges ideales Gas gilt $C_V = \frac{3}{2}R$ bzw. $\frac{R}{C_V} = \frac{2}{3}$, sodass $\boxed{TV^{2/3} = \mathit{konstant}}$

Für 1 Mol eines idealen Gases ist $T = \frac{PV}{R}$ und folglich $\boxed{PV^{5/3} = \mathit{konstant}}$

Analog $V = \frac{RT}{P} \Rightarrow \frac{T^{5/3}}{P^{2/3}} = \mathit{konstant} \Rightarrow \boxed{\frac{T}{P^{2/5}} = \mathit{konstant}}$

Für einen adiabatischen Prozess ergibt sich somit für ein einatomiges ideales Gas

$$\boxed{\begin{array}{lll} T_1 \to T_2: & P_2 = P_1\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{5/2} & V_2 = V_1\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{3/2} \\ P_1 \to P_2: & T_2 = T_1\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{2/5} & V_2 = V_1\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{3/5} \\ V_1 \to V_2: & T_2 = T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{2/3} & P_2 = P_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{5/3} \end{array}}$$

Hier wollen wir den Druck P_2 berechnen, wenn das Volumen adiabatisch auf $V_2 = 2V_1$ verdoppelt wird:

$$P_2 = P_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{5/3} = 9976.8\text{ Pa}\left(\frac{1}{2}\right)^{5/3} = \boxed{3142.5\text{ Pa}}$$

b) Arbeit während der adiabatischen Expansion

$$W_{\mathrm{ad}} = U_1 - U_2 = \frac{3}{2}nR(T_1 - T_2) = \frac{3}{2}nRT_1\left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{2/3}\right) = U_1\left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{2/3}\right)$$

Hier wurde benutzt, dass die innere Energie eines einatomigen idealen Gases $U = \frac{3}{2}nRT$ ist. Für $V_2 = 2V_1$ erhalten wir

$$W_{\mathrm{ad}} = U_1\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3}\right) \approx \boxed{0.37\,U_1 = 1385\;\mathrm{J}}$$

1.3 Isotherme Expansion

a) Bei konstanter Temperatur sagt das ideale Gasgesetz $P_1V_1 = P_2V_2$, d.h.

$$P_2 = \frac{P_1V_1}{V_2} = \frac{9976.8\;\mathrm{Pa}}{2} = \boxed{4988.4\;\mathrm{Pa}}$$

b) Arbeit bei isothermer Expansion

$$W_{\mathrm{iso}} = \int_{V_1}^{V_2} P\mathrm{d}V = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V}\mathrm{d}V = nRT\ln\frac{V_2}{V_1} = \frac{2}{3}U\ln\frac{V_2}{V_1}$$

Dies liefert für $V_2 = 2V_1$

$$W_{\mathrm{iso}} = \frac{2}{3}U\ln 2 \approx \boxed{0.46\,U = 1729\;\mathrm{J}}$$

1.4 Wärmekapazität

a) Für ein einatomiges ideales Gas ist $C_V = \frac{3}{2}R$ und $C_P = \frac{5}{2}R$.

b) Die molare Wärmekapazität gibt an, welche Wärmemenge ΔQ benötigt wird, um die Temperatur von 1 Mol Substanz um ΔT zu erhöhen:

$$C_{molar} = \frac{\Delta Q}{\Delta T}$$

2 Theorie der Carnot-Maschine

2.1 Aufbau des Carnot-Kreisprozesses

a) Analog zu Aufgabe 1.3a:

$$P_B = \frac{P_AV_A}{V_B} = \frac{P_A}{2} = \frac{19954.7\;\mathrm{Pa}}{2} = \boxed{9977.35\;\mathrm{Pa}}$$

b) Der Druck P_C am Ende der adiabatischen Exapansion $B \to C$, während der die Temperatur von $T_2 = 600$ K auf $T_1 = 400$ K sinken soll, berechnet sich entsprechend Aufgabe 1.2:

$$P_C = P_B\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{5/2} = 9977.35\;\mathrm{Pa}\left(\frac{400\;\mathrm{K}}{600\;\mathrm{K}}\right)^{5/2} = \boxed{3620.65\;\mathrm{Pa}}$$

c) Der letzte Schritt des Carnot-Kreisprozesses ist die adiabatische Kompression $D \to A$, die zurück zum Ausgangsdruck p_A führt:

$$P_D = P_A\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{5/2} = 2P_B\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{5/2} = 2P_C = \boxed{7241.3\;\mathrm{Pa}}$$

2.2 Analyse und Optimierung des Carnot-Kreisprozesses

a) Wirkungsgrad η_{carnot} einer Carnot Maschine, die zwischen zwei Wärmereservoirs mit den Temperaturen $T_1 = 400$ K und $T_2 = 600$ K arbeitet:

$$\eta_{\text{carnot}} = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{400\text{ K}}{600\text{ K}} = \boxed{33\%}$$

b) Wärme, die ins System übertragen wird, und Arbeit, die vom System geleistet wird, für jeden Schritt des Carnot-Kreisprozesses:

Schritt 1: Isotherme Expansion $A \to B$, entsprechend Aufgabe 1.3b:

$$\boxed{W_{AB} = \frac{2}{3} U_A \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = 3458\,\text{J}}$$

$$\boxed{Q_{AB} = W_{AB}} \quad U_B = U_A = \frac{3}{2} nRT_2 \ \text{(für einatomiges ideales Gas)}$$

Schritt 2: Adiabatische Expansion $B \to C$, entsprechend Aufgabe 1.2:

$$W_{BC} = U_B \left(1 - \left(\frac{V_B}{V_C}\right)^{2/3}\right) = U_B \left(1 - \frac{T_C}{T_B}\right) = \boxed{U_A \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) = 2494\,\text{J}}$$

$$\boxed{Q_{BC} = 0} \quad U_C = U_B - W_{BC} = U_A \frac{T_1}{T_2}$$

Schritt 3: Isotherme Kompression $C \to D$, entsprechend Aufgabe 1.3b:

$$W_{CD} = \frac{2}{3} U_C \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right) = \frac{2}{3} U_A \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right) \frac{T_1}{T_2} \overset{(\star)}{=} -\frac{2}{3} U_A \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) \frac{T_1}{T_2} = \boxed{-W_{AB} \frac{T_1}{T_2} = -2305\,\text{J}}$$

$$\boxed{Q_{CD} = W_{CD}} \quad U_D = U_C = U_A \frac{T_1}{T_2}$$

Gleichung $(\star)$ ergibt sich, weil für die beiden Adiabaten $B \to C$ und $D \to A$ gemäß Aufgabe 1.2a gilt:

$$V_C = V_B \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{3/2}, \quad V_A = V_D \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{3/2} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_C}{V_B} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{3/2} = \frac{V_D}{V_A} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_D}{V_C} = \frac{V_A}{V_B}$$

Schritt 4: Adiabatische Kompression $D \to A$, entsprechend Aufgabe 1.2:

$$W_{DA} = -W_{AD} = -U_A \left(1 - \left(\frac{V_A}{V_D}\right)^{2/3}\right) = -U_A \left(1 - \frac{T_D}{T_A}\right) = -U_A \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) = \boxed{-W_{BC}}$$

$$\boxed{Q_{DA} = 0}$$

Der Wirkungsgrad $\eta = W/Q_{AB}$ des Kreisprozesses ergibt sich aus der totalen Arbeit W und der bei hoher Temperatur zugeführten Wärme Q_{AB} :

$$W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA} = W_{AB} \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right), \quad Q_{AB} = W_{AB} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} = \eta_{\text{carnot}}}$$